УДК 532.546

И. К. Волянская, А. Я. Шпилевой

ПОТЕНЦИАЛЫ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Сформулирована и доказана новая теорема, обобщающая теоремы о прямой и окружности. С их помощью получены комплексные потенциалы фильтрационных течений в двухкомпонентной среде, заполняющей угловую область.

The new theorem which generalizing the theorems of a straight line and a circle is formulated and proved. With their help complex potentials of filtration flows in the two – component media filling angle area are received.

Ключевые слова: потенциал фильтрационного течения, коэффициент проницаемости, симметрия, функция Грина, обобщенная теорема об окружности, круговой сектор.

Key words: potential of a filtration flows, permeability factor, symmetry, Green's function, the generalized theorem of a circle, circular sector.

Введение

Для исследования фильтрационных течений жидкости, подчиняющихся закону Дарси, удобно использовать комплексный потенциал $W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ [1; 2]. По нему можно определить поле скоростей и поле давлений [1]. Если границами раздела областей фильтрации являются прямые или окружности, то для определения комплексных потенциалов традиционно используется метод изображения особых точек [1—4]. Здесь предлагается альтернативная методика.

Перечисленные задачи фактически сводятся к построению функции Грина задач Дирихле и Неймана, а в более общем случае — функции Грина задачи линейного сопряжения. Основой нового способа построения этой функции служат теорема об ее определении с помощью симметрий, которая обобщает теоремы о прямой и окружности, а также новый алгоритм решения линейной задачи сопряжения. Далее теорема и алгоритм используются для решения задач о потенциале фильтрационного течения в круговом секторе и угловой области.

Будем использовать следующее известное свойство функции Грина двухмерной задачи Дирихле в односвязной области D [5; 6]: она имеет представление

$$g(z,\, z_0) = \frac{1}{2\pi}\, ln|h(z,z_0)|,\; z,\, z_0 \in D, \qquad (1)$$

где функция $w=h(z,z_0)$ аналитическая в области D, имеет там простой ноль в точке $z=z_0$ и является конформным отображением области D на единичный круг $|w|<1$, причем точка z_0 отображается в центр этого круга, точку $w=0$. Таким образом, задача определения функции Грина сводится к нахождению функции $h(z,z_0)$, которую назовем *представляющей функцией области D*. Именно ей будет уделено основное внимание.

Удвоение области посредством симметрии

Пусть граница односвязной области D содержит отрезок некоторой прямой (он может быть лучом или всей прямой) или дугу некоторой окружности (она может быть полной окружностью); обозначим эту часть границы l и будем считать, что область D находится по одну сторону от линии, являющейся продолжением l.

Пусть s — симметрия от l. Тогда множество $D_0=int(D\cup l\cup sD)$ (символ $intA$ обозначает внутренность множества A) также является областью. Назовем ее *удвоением области D посредством симметрии s*. В свою очередь область D назовем *делением области D_0 посредством s*. Например, ромб с острым углом $\pi/3$ является удвоением правильного треугольника посредством отражения от его стороны (рис. 2).

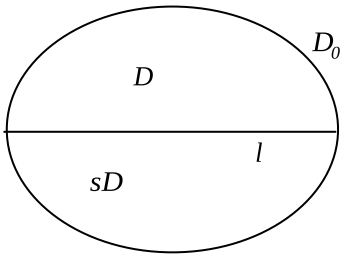

Рис. 1. Удвоение области посредством симметрии

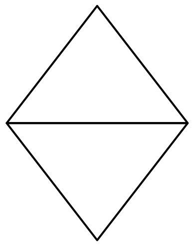

Рис. 2. Удвоение правильного треугольника посредством отражения от одной из его сторон; результатом является ромб

Замечание 1. Симметрия s является конформным автоморфизмом второго рода области D_0, причем равенство $sz = z$ выполняется на линии l и только на ней.

Представление функции Грина задачи Дирихле для области *D* через функцию Грина для области *D*₀

Теорема 1. Пусть область D является делением области D_0 посредствам симметрии s. Пусть $h(z,z_0)$ и $h_0(z,z_0)$ — представляющие функции областей D и D_0, причем в том случае, когда s является симметрией от окружности, функция $\bar{h}_0(\overline{sz}, \bar{z}_0) = \overline{h_0(sz, z_0)}$ голоморфна в области D. Тогда представляющая функция области D выражается через представляющую функцию области D_0 по формуле

$$h(z, z_0) = \frac{h_0(z, z_0)}{\overline{h_0(sz, z_0)}}, z, z_0 \in D. \qquad (2)$$

Доказательство. Функция $\overline{h_0(sz, z_0)}$ будет аналитической в области D_0, за исключением тех точек, где $\overline{sz}$ имеет полюс (это возможно, если s — симметрия от окружности и область sD содержит бесконечно удаленную точку), и, следовательно, в области $D \subset D_0$, причем в области D она нигде не обращается в 0. Действительно, если $z, z_0 \in D$ и $h_0(sz,z_0) = 0$, то согласно определению представляющей функции это равенство имеет место лишь тогда, когда $sz = z_0$, т. е. $z = sz_0 \notin D$.

Таким образом, функция $h(z,z_0)$ является аналитической в области D и имеет там единственный простой ноль в точке $z = z_0$. Кроме того, $|h_0(z,z_0)| = |h_0(sz,z_0)| = 1$ на дополнении границы области D к линии l, поскольку это дополнение и его симметрия являются частями границы области D_0. Наконец, для всех точек z на линии l выполняется равенство $sz = z$, поэтому там $h_0(sz,z_0) = h_0(z,z_0)$ и, значит, на линии l будем иметь

$$|h(z, z_0)| = \left|\frac{h_0(z, z_0)}{\overline{h_0(sz, z_0)}}\right| = \left|\frac{h_0(z, z_0)}{\overline{h_0(z, z_0)}}\right| = 1.$$

Итак, функция $h(z,z_0)$ удовлетворяет всем условиям для представляющей функции. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 1 неприменима, например, в том случае, когда D является кругом $|z| < r$. В этом случае D_0 будет расширенной комплексной плоскостью, $D_0 = C^*$, $sz = r^2/\bar{z}$, $h_0(z,z_0) = z - z_0$, следовательно, формально

$$h(z, z_0) = \frac{(z - z_0)z}{r^2 - \bar{z}_0 z}, g(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{(z - z_0)z}{r^2 - \bar{z}_0 z}\right|. \qquad (3)$$

Но тогда в области D представляющая функция имеет лишний ноль $z = 0$. Для устранения лишней особенности следует к ложной функции Грина (3) добавить контрчлен $-\ln|z/r|/2\pi$, который обращается в 0 на границе круга. Получаем

$$g(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{r(z - z_0)}{r^2 - \bar{z}_0 z}\right|.$$

Это и будет истинная функция Грина задачи Дирихле для круга $|z|<r$. Соответствующие контрчлены можно использовать и в других случаях.

Функция Грина задачи Дирихле для кругового сектора

В случае угловой области с углом раствора φ представляющая функция, как следует из результатов статьи [3], имеет вид

$$h(z,z_0)=\frac{z^p-z_0{}^p}{z^p-\overline{z_0{}^p}}=\frac{z^p-z_0{}^p}{z^p-\exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p},\ p=\pi/\alpha. \tag{4}$$

Здесь z^p обозначает регулярную ветвь степенной функции в плоскости с разрезом вдоль полуоси неотрицательных действительных чисел $Rez\geq 0$, $\mathrm{Im}z=0$. Для этой ветви выполняется равенство

$$\overline{z^p}=\exp(-2\pi pi)\bar{z}^p. \tag{5}$$

Используем теорему 1 для определения функции Грина для кругового сектора, замкнутого дугой окружности радиуса r (рис. 3).

Хотя точка $z=0$ является особой для функции $\overline{h_0(sz,z_0)}$, но эта особенность устранимая. Следовательно,

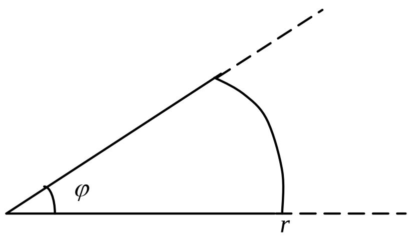

Рис. 3. Круговой сектор

$$h(z,z_0)=\frac{h_0(z,z_0)}{h_0(sz,z_0)}=\frac{z^p-z_0{}^p}{z^p-\exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p}\cdot\frac{\overline{(r^2/\bar{z})^p}-z_0{}^p}{\overline{(r^2/\bar{z})^p}-\exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p}$$

(учтено равенство (5)). Для упрощения второй дроби умножим ее числитель и знаменатель на z^p. Тогда согласно определению регулярной ветви многозначной степенной функции z^p будем иметь $z=\rho\exp(ia)$,

$$0\leq a<2\pi \rightarrow \overline{(r^2/\bar{z})^p}z^p=$$

$$=\overline{(r^2/\rho\exp(\mathrm{i}\alpha))^p}\rho^p\exp(ip\alpha)=r^{2p}/\rho^p\rho^p\exp(-ip\alpha)\exp(ip\alpha)=r^{2p}.$$

Учитывая этот результат, для представляющей функции получаем следующее выражение:

$$h(z,z_0)=\frac{(z^p-z_0{}^p)(r^{2p}-z_0{}^pz^p)}{(z^p-\exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p)(r^{2p}-\exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^pz^p)}. \tag{6}$$

Пусть s есть симметрия от дуги. Тогда удвоением рассматриваемого кругового сектора будет угловая область. Выражение для представляющей функции этой области дается формулой (4). В данном случае $sz=r^2/\bar{z}$.

Потенциал фильтрационного течения в двухкомпонентной среде

Здесь сохраняются обозначения, используемые в предыдущих пунктах. Пусть D и $D_1=sD$ будут областями фильтрации с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2 соответственно, а область D_0 граничит с водной средой. Пусть в области D в точке $z=z_0$ действует источник с дебитом Q.

Пусть $W_0(z)$ и $W_1(z)$ — комплексные потенциалы фильтрационных течений в областях D и D_1. Они должны подчиняться следующим условиям:

1) функция $W_0(z)$ имеет логарифмическую особенность вида $Q\ln(z-z_0)/2\pi$, а вне точки $z=z_0$ она аналитическая в области D;

2) функция $W_1(z)$ аналитическая в области D_1;

3) действительные части обоих потенциалов обращаются в 0 на внешних границах областей D и D_1;

4) на линии l выполняются следующие граничные условия:

$$\frac{\mathrm{Re}W_0}{k_1}=\frac{\mathrm{Re}W_1}{k_2},\ \mathrm{Im}W_0=\mathrm{Im}W_1. \tag{7}$$

Покажем, что этим условиям удовлетворяют следующие потенциалы:

$$\begin{aligned} &W_0(z) = Qg(z, z_0) + vQ\overline{g(sz, z_0)}, z \in D \\ &W_1(z) = wQg(z, z_0), z \in D_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь v и w — коэффициенты отражения и прохождения, а $g(z,z_0)$ — комплексный потенциал течения, создаваемого точечным источником дебита 1. Его действительная часть совпадает с функцией Грина задачи Дирихле для области D_0, а мнимая часть является сопряженной гармонической функцией. Поскольку функция $g(z,z_0)$ в области D_0 имеет единственную логарифмическую особенность в точке $z = z_0$, а в рассматриваемом случае $z_0 \in D$, то функции $W_0(z)$ и $W_1(z)$ удовлетворяют условиям 1 и 2. Условие 3 также удовлетворяется, так как по определению функции Грина действительные части функций $g(z,z_0)$ и $\overline{g(sz, z_0)}$ обращаются в 0 на границе области D_0, а значит, и на тех частях этой границы, которые служат внешними границами областей D и D_1. Осталось выполнить условие 4. Поскольку на линии l $sz = z$ и $\mathrm{Re}\, g(z,z_0) = \mathrm{Re}\, \overline{g(z, z_0)}$, $\mathrm{Im}\, g(z,z_0) = -\mathrm{Im}\, \overline{g(z, z_0)}$, то после подстановки выражения (8) в соотношения (7) и необходимых сокращений получаем следующие уравнения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$k_2(v + 1) = k_1 w, \; 1 - v = w.$$

Решая их, находим

$$v = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, w = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) дают решение поставленной задачи. Отметим, что замечание 2 сохраняет силу и в этом случае.

Заметим еще, что найденное решение можно использовать и в том случае, когда источник расположен в области D_1, поскольку области D и D_1 симметричны друг другу. Результатом будут следующие формулы:

$$\begin{aligned} &W_0(z) = w_1 Qg(z, z_0), z \in D, \\ &W_1(z) = Qg(z, z_0) + v_1 Q\overline{g(sz, z_0)}, z \in D_1, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$v_1 = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, w_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \tag{11}$$

Используем полученные результаты, когда областями фильтрации являются круговой сектор и ему симметричная относительно дуги внешняя область. Тогда удвоенной областью будет угловая область. Ограничимся случаем расположения источника в круговом секторе. Тогда с помощью формул (1), (4), (8) и результатов предыдущего пункта получаем

$$W_0(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z^p - z_0{}^p}{z^p - \exp(-2\pi p i)\bar{z}_0{}^p} + v\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r^{2p} - \exp(-2\pi p i)\bar{z}_0{}^p z^p}{r^{2p} - z_0{}^p z^p},$$

$$W_1(z) = w\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z^p - z_0{}^p}{z^p - \exp(-2\pi p i)\bar{z}_0{}^p}, \; p = \pi / \varphi;$$

здесь значения коэффициентов v и w даются выражениями (9). В частном случае, когда l — непроницаемая граница, $k_2 = 0$, $v = 1$, поэтому $W_1(z) = 0$ и

$$W_0(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{(z^p - z_0{}^p)(r^{2p} - \exp(-2\pi p i)\bar{z}_0{}^p z^p)}{(z^p - \exp(-2\pi p i)\bar{z}_0{}^p)(r^{2p} - z_0{}^p z^p)}.$$

Заключение

Таким образом, в работе с помощью обобщения теорем о прямой и окружности относительно просто получены решения достаточно сложных задач о потенциалах фильтрационных течений в двухкомпонентной среде, заполняющей угловую область. Данная методика может быть использована для решения задач электростатики и магнитостатики, а также теории теплопроводности.

Список литературы

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М., 1972.
2. *Зайцев А.А, Шпилевой А.Я.* Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах. Калининград, 2001.
3. *Волянская И.К., Зайцев А.А., Шпилевой А.Я.* Комплексные потенциалы фильтрационных течений в линзах // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Орел, 2009. Вып. 7. С. 36—39.
4. *Волянская И.К., Шашков А.С., Шпилевой А.Я.* Моделирование фильтрационных течений в области ограниченной сторонами прямоугольника // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Вып. 4. Калининград, 2009. С. 12—17.
5. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М., 1968.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.

Об авторах

А.Я. Шпилевой — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта.

И.К. Волянская — асп., РГУ им. И. Канта, volyanskaya86@mail

Authors

A. Shpilevoy — Dr. IKSUR.

I. Volyanskaya — PhD student, IKSUR, volyanskaya86@mail